

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ISSN 0134-3998

МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ХОЗЯЙСТВЕННОГО МЕХАНИЗМА  
И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

О П Т И М И З А Ц И Я 39 (56)

НОВОСИБИРСК, 1986

Выпуск 39(56)

О П Т И М И З А Ц И Я

1986 г.

Численные методы

УДК 519.8: 658.12.122

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ  
ДРОБНО-КУБИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Е.Н.Егорова

В настоящее время все большее внимание уделяется вопросам использования экономико-математического моделирования для оценки и сравнения различных систем экономического стимулирования и ценообразования [1-3]. Результаты таких исследований могут использоваться для обоснования целесообразности проведения экономических экспериментов, реализующих предложения по совершенствованию хозяйственного механизма. В этих исследованиях интересы хозяйственной единицы (как правило, предприятия) моделируются с помощью целевых функций. Одной из таких функций является размер фондов поощрения, который предприятие стремится максимизировать.

В работе рассмотрены две задачи дробно-кубического программирования с линейными ограничениями, которые интерпретируются как задачи максимизации величины фондов поощрения промышленного предприятия при различных системах фондообразующих показателей, применяющихся в одиннадцатой пятилетке. Предложен общий подход к решению таких задач, основанный на сведении исходной задачи к соответствующей паре последовательно решаемых задач, первая из которых - линейного или дробно-параметрического программирования, вторая - достаточно простая задача нелинейного программирования с переменными, являвшимися параметрами в первой задаче. На основе этого подхода, именуемого в дальнейшем параметрическим, разработаны методы решения рассматриваемых задач.

§ 1. Постановка задач и их экономическая интерпретация

Рассмотрим две задачи дробно-кубического программирования:

$$F(X) = (SX + z) \cdot (z_1 + C_0 X + \frac{C_1 X + d}{CX + k}) \rightarrow \max_{X \in G}; \quad (1)$$

$$F(X) = (SX + z)(z_1 + C_0 X) + \frac{C_1 X + d}{CX + k} \rightarrow \max_{X \in G}, \quad (2)$$

где  $S, C, C_0, C_1$  - вектор-строки размерности  $n$ ;  $z, z_1, d, k$  - числа;  $G \subset R^n$  - выпуклый многогранник

$$G \equiv \{X \mid AX = B, X \geq 0\};$$

$A = (a_{ij})$  - матрица размерности  $m \times n$ ;  $B$  - вектор-столбец размерности  $m$ ;  $X$  - вектор переменных размерности  $n$ .

Экономическая интерпретация задач. Пусть  $X$  - вектор выпуска различных видов продукции в натуральном выражении;  $G$  - множество производственных возможностей предприятия, определяемое наличием различных видов ресурсов, их затратами на единицу изделия, необходимостью достижения заданных технико-экономических показателей;  $F(X)$  - величина фондов поощрения в зависимости от плана  $X$ ;  $S, C, C_0, C_1$  - векторы для расчета фондообразующих показателей, умноженные на соответствующие нормативы;  $z, z_1, d, k$  - константы для расчета показателей; это могут быть значения показателей по номенклатуре, жестко заданной "сверху", обязательные отчисления в бюджет и т.п.

Вид функции  $F(X)$  зависит от того, какие фондообразующие показатели установлены, и по отношению к какому показателю определены нормативы. Если исходить из методики расчета фондов поощрения [4], то задачи вида (1) возникают, когда нормативы отчислений в ФМП за все показатели установлены по отношению к прибыли или к расчетной прибыли. Примером системы фондообразующих показателей могут служить производительность труда и затраты на рубль продукции или нормативно-чистая продукция и затраты на рубль товарной продукции. С задачами вида (2) сталкиваемся при установлении норматива отчислений в ФМП за достижение первого показателя по отношению к прибыли, а второго - по отношению к ФМП по пятилетнему плану. Пример системы фон-

дообразующих показателей - НЧП и удельный вес продукции высшей категории качества в общем объеме производства.

§ 2. Параметрический подход к решению задач

Характер целевых функций задач (1) и (2) не позволяет, вообще говоря, использовать для их решения традиционные методы поиска глобального оптимума [5]. Однако учет определенной специфики этих задач, как будет показано ниже, позволяет найти для них глобальное решение.

Общая идея используемого подхода. Исходная задача нелинейного программирования сводится к эквивалентной паре последовательно решаемых задач, первая из которых - задача параметрического программирования, а вторая - нелинейного программирования с переменными, являвшимися параметрами в первой задаче. При этом обе задачи пары должны быть относительно несложными.

Отметим, что общая идея этого параметрического подхода не нова и уже применялась ранее в [6] для решения задачи (2) в случае  $S = 0$ , но не была четко сформулирована.

Поясним основные моменты использования параметрического подхода на примере следующей задачи:

$$F(X) \rightarrow \max_{X \in G}, \quad (3)$$

где  $G \subset R^n$  - многогранное множество, а функция  $F(X)$  непрерывна и ограничена на  $G$ .

I. Введем вспомогательные переменные-параметры в задаче (3):  $\varphi(X) = M$ , где  $\varphi(X)$  - аффинная вектор-функция размерности  $n_1$ ;  $M$  - вектор параметров той же размерности, и подставим их в эту задачу. Например, в задаче (1) можно ввести  $M = \begin{pmatrix} z \\ z_1 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi(X) = \begin{pmatrix} C_0 X + z \\ C_1 X + d \end{pmatrix}$ .

2. Пусть теперь целевая функция задачи (3) представима в виде

$$F(X) = \varphi(X, M) = \varphi_1(M) + \varphi_2(M) \cdot \varphi_3(X, M),$$

где  $\varphi_1(M), \varphi_2(M)$  - непрерывные числовые функции, дифференцируемые на множестве  $D \equiv \{M \mid M \in G, \neq \emptyset\}$ , причем  $G_1 \equiv \{X \mid \varphi(X) = M\}$ .

Относительно функции  $\varphi_3(X, M)$  будем предполагать, что она удовлетворяет следующим условиям:

- а) является линейной или дробно-линейной по  $X$  ;  
 б) является линейной по  $M$  (для  $r_1=1$  может быть квадратичной или полиномиальной по  $M$ ).

После введения параметров задача (3) запишется следующим образом:

$$\varphi(X, M) = \varphi_1(M) + \varphi_2(M) \cdot \varphi_3(X, M) \rightarrow \max_{X, M}, X \in G \cap G_1, M \in D(3')$$

(Условие  $\varphi(X) = M$  добавлено к ограничениям для обеспечения эквивалентности преобразований.) Например, для задачи (1) имеем

$$\varphi(X, H, P) = P \cdot (r_1 + \frac{d}{H}) + P \cdot (\frac{H \cdot C_0 X + C_1 X}{H}) \rightarrow \max_{X, H, P},$$

$$X \in G \cap G_1, M \in D,$$

где  $G_1 \equiv \{X | SX = P - r; CX = H - h\}$ ;  $D \equiv \{(H, P) | G \cap G_1 \neq \emptyset\}$ .

3. Для задачи (3') выпишем пару последовательно решаемых задач, которую назовем соответствующей:

$$f(M) = \max_{X \in G \cap G_1} \varphi_3(X, M), M \in D; \quad (3.1)$$

$$R(M) = \varphi_1(M) + \varphi_2(M) \cdot f(M) \rightarrow \max_{M \in D}. \quad (3.2)$$

Например, для задачи (1) такая пара будет следующей:

$$f(H, P) = \max_{X \in G \cap G_1} [H \cdot C_0 X + C_1 X], (H, P) \in D; \quad (I.1)$$

$$R(H, P) = P \cdot (r_1 + \frac{d}{H} + \frac{f(H, P)}{H}) \rightarrow \max_{(H, P) \in D}. \quad (I.2)$$

В задаче (3.1)  $M$  рассматривается как вектор-параметр, в задаче (3.2) - как вектор переменных.

4. Решение пары задач (3.1)-(3.2) находится по следующей схеме:

- решается задача (3.1), при этом определяется  $\hat{X}(M)$  - зависимость оптимального плана от вектора  $M$  и функция  $f(M)$ ;
- $f(M)$  подставляется в целевую функцию задачи (3.2) и находится решение этой задачи  $M^*$ ;
- вычисляется  $X^* = X(M^*)$ , где  $\hat{X}(M)$  - функция, найденная при решении задачи (3.1).

Таким образом, решением пары задач (3.1)-(3.2) является точка  $(X^*, M^*)$ . Имеет место следующая легко доказываемая ТЕОРЕМА. Пара задач (3.1) - (3.2) эквивалентна задачам (3') и (3).

"Эквивалентность" в формулировке теоремы означает, что любое решение  $(X^*, M^*)$  пары задач (3.1)-(3.2) есть решение задачи (3'), и наоборот, причем  $X^*$  - решение задачи (3). Кроме того, если  $\bar{X}$  - решение задачи (3), то  $(\bar{X}, \varphi(\bar{X}))$  - решение задачи (3') и пары задач (3.1)-(3.2).

Формально параметрический подход можно применять для решения разных классов задач нелинейного программирования (причем условия а) и б) относительно вида функций  $\varphi_3(X, M)$  могут не выполняться), но его использование, по-видимому, имеет смысл лишь тогда, когда

- 1) методы решения задач (3.1) и (3.2) "не сложны" или значительно "проще", чем "прямой" метод решения задачи 3, или
- 2) не существует метода нахождения глобального решения задачи (3), а методы решения задач (3.1) и (3.2) имеются или могут быть легко получены.

Для задач (1)-(2) имеет место условие (2).

Далее параметрический подход применяется для решения задачи (1).

### § 3. Алгоритм решения задачи (1)

Алгоритм включает следующие основные этапы.

1. Задача (1) сводится к соответствующей паре задач (I.1)-(I.2).

2. Решается задача линейного параметрического программирования (I.1) с двумя параметрами в целевой функции и в векторе ограничений. Параметрами являются  $H$  и  $P$ . В процессе ее решения множество  $D$  разбивается на  $\ell$  критических областей  $d_u$  таких, что

$$\bigcup_{u=1}^{\ell} d_u = D, X = \hat{X}_u(H, P)$$

$$f(H, P) = f_u(H, P), \text{ если } (H, P) \in d_u,$$

где  $\hat{X}_u$  - линейная функция;  $f_u$  - квадратичная функция;  $d_u$  - выпуклые многоугольники, не имеющие общих внутренних точек [7,8]. При этом  $(\nabla(H, P))(\exists \hat{X}(H, P))$ , так как  $G$  ограничено.



3. Решается задача нелинейного программирования (I.2), в которой две переменные:

а) найденная зависимость  $f(H, P)$  подставляется в целевую функцию задачи (I.1):

$$R(H, P) = R_u(H, P) = P(\alpha_u + \frac{d}{H} + \frac{f_u(H, P)}{H}), \text{ если } (H, P) \in d_u$$

б) решается  $\forall$  задач вида

$$R_u(H, P) \rightarrow \max_{(H, P) \in d_u}, \quad (I.3)$$

пусть они имеют решения  $(H^u, P^u)$  соответственно;

в) решается задача

$$R_u(H^u, P^u) \rightarrow \max_{u=1,6}, \quad (I.4)$$

пусть ее решение - точка  $(H^*, P^*)$ .

4. Зная  $(H^*, P^*)$ , находим  $X^* = X_u(H^*, P^*)$ , где  $u$  такое, что  $(H^*, P^*) \in d_u$ .  $X^*$  есть решение задачи (I).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Число областей  $d_u$  всегда конечно [6,7], поэтому каждый этап алгоритма имеет конечное число шагов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Задачи (I.3) и (I.4) могут иметь несколько решений. Поэтому если нужно найти все решения задачи (I), то каждое решение задачи (I.3) удобно записывать в таблицу с графами, соответствующими  $R_u(H^u, P^u), H^u$  и  $P^u$ . Тогда, зная  $(H^*, P^*)$ , будет легко найти другие точки, дающие то же значение целевой функции  $R(H, P)$ . Далее будем считать, что требуется найти только одно решение задачи (I).

Экономическая интерпретация алгоритма. Решая задачу (I.1) для каждого допустимого сочетания значений показателей  $H$  и  $P$ , находим план  $X$ , максимизирующий фонды поощрения. Затем, решая задачу (I.2), среди всех сочетаний  $H$  и  $P$  выбираем то, которое дает наибольшее значение среди всех максимумов, найденных на этапе I при решении задачи (I.1). Подставляем в это решение оптимальное сочетание показателей  $H^*$  и  $P^*$  и находим тем самым оптимальный план  $X^*$ .

При реализации алгоритма возникает проблема решения задачи (I.3). Для этого достаточно сравнить значения функций  $R_u(H, P)$  в вершинах многоугольников  $d_u$  и в стационарных точках внутри и на их границах. Поскольку каждый многоугольник  $d_u$  имеет общие стороны с некоторыми многоугольниками

$d_j, j < u$ , то целесообразно включать в процедуру сравнения такие общие стороны. Этого можно достичь, если выполнять п.2 и а)-б) п.3 не последовательно сразу для всех  $u$ , а очередно для каждого  $u$ : после нахождения области  $d_u$  решаем для нее задачу (I.3), переходим к определению следующей области  $d_{u+1}$  и так далее. Для обеспечения удобства и экономии вычислений при такой процедуре алгоритм решения задачи линейного программирования должен удовлетворять следующим требованиям:

1) обеспечивать вычисление

- координат вершин многоугольников  $d_u$ ;
- уравнений сторон многоугольников  $d_u$ ;
- уравнений сторон, не являющихся общими ни с одним многоугольником  $d_j, j < u$ ;

2) использовать эти величины при переходе от области  $d_u$  к области  $d_{u+1}$ .

Таким образом, наиболее сложной частью в решении пары задач (I.1)-(I.2) является процедура разбиения области  $D$  на многоугольники  $d_u$  в задаче (I.1), согласованная с решением задачи (I.3). Свойствами 1)-2) обладает алгоритм линейного двухпараметрического программирования (АОДП), изложенный в приложении.

В процессе решения задачи (I.1) с помощью АОДП области определяются последовательно, начиная с некоторой области, содержащей начальную точку  $(H_0, P_0)$ . Для каждой  $d_u$  определяются смежные, т.е. имеющие с ней общую сторону или часть стороны, области  $d_j$ . Смежные области, уже исследованные на предыдущих шагах, исключаются из рассмотрения, а остальные вносятся в "список" на последующих шагах. При этом на шаге  $u$  для области  $d_u$  определяются:

1) уравнения границ

$$p_v^u H + q_v^u P + g_v^u = 0, \quad (4)$$

где  $v$  - номер границы;  $p_v^u, q_v^u, g_v^u$  - числа, определяемые в процессе решения;

2) интервалы  $H \in [d_v^u, \beta_v^u]$  ( $P \in [\alpha_v^u, \beta_v^u]$ ), в которых эти уравнения задают отрезок прямой, являющийся стороной  $v$ ;

3) коэффициенты  $\sigma_i^u, i=1,6$ , функции  $f_u(H, P)$ , ко-

торая имеет вид

$$f_u(H, P) = \sigma_1^u H^2 + \sigma_3^u P \cdot H + \sigma_3^u H + \sigma_5^u P + \sigma_6^u + \sigma_2^u P, (\sigma_2^u = 0);$$

4) множество  $V^u$  номеров сторон многоугольника  $d_u$ , не являющихся общими ни с одной из сторон многоугольников  $d_j$ ,  $j < u$ .

После завершения этих расчетов можно сразу решать задачу (I.3) для области  $d_u$ . Ниже приводится алгоритм решения этой задачи.

1. Для нахождения стационарных точек функции  $R^u(H, P)$  внутри области  $d_u$  решаем систему уравнений

$$\frac{\partial R^u(H, P)}{\partial H} = \frac{P}{H} (\sigma_1^u H^2 - \sigma_5^u P - \sigma_6^u - d) = 0; \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial R^u(H, P)}{\partial P} = \frac{1}{H} (\sigma_1^u H^2 + 2\sigma_5^u P + (\sigma_3^u + \sigma_4^u)H + \sigma_6^u + d) = 0. \quad (4.2)$$

Эта система несложна и решается аналитически. Решения, попавшие в область  $d_u$ , включаем в множество стационарных точек  $L^u$ .

2. Для всех  $v \in V^u$  определяем координаты вершин многоугольника  $d_u(H_v^u, P_v^u)$ . При этом  $H_v^u = \alpha_v^u$  ( $P_v^u = \beta_v^u$ ), если  $\beta_v^u = \alpha_{v-1}^u$ , и  $H_v^u = \beta_v^u$  ( $P_v^u = \alpha_v^u$ ), если  $\alpha_v^u = \beta_{v-1}^u$ . Значения  $P_v^u$  ( $H_v^u$ ) вычисляются по формуле (4).

3. Для нахождения стационарных точек функции  $R^u(H, P)$  на отрезках, являющихся сторонами многоугольника  $d_u$ , выразим из (4) значения параметра  $P$  через  $H$  (или  $H$  через  $P$ ) и подставим полученную зависимость в уравнение (4.1) (или в (4.2)). Получим в итоге уравнение, которое легко решается аналитически. Для его решений, попавших в интервал  $H \in [\alpha_v^u, \beta_v^u]$  ( $P \in [\beta_v^u, \alpha_v^u]$ ), вычислим значение  $R^u(H_v^u)$  и включим эти точки в множества  $L^u$ .

4. Находим  $R^u = \max_{(H, P) \in L^u} R^u(H, P)$ . Точку, в которой достигнуто значение  $R^u$ , обозначим через  $(H^u, P^u)$ .

После того, как с помощью АЛДИ определены все области  $d_u$ , легко решить задачу (I.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Применим параметрический подход к решению задачи (2). Введем параметры следующим образом:

$$M = \begin{pmatrix} H \\ P \end{pmatrix} = \varphi(X) = \begin{pmatrix} C_0 X + z_1 \\ S X + z \end{pmatrix}$$

и выпишем соответствующую пару задач

$$f(H, P) = \max_{X \in G \cap D} \left[ \frac{C_1 X + d}{CX + k} \right], \quad (2.1)$$

$$R(H, P) = P \cdot H + f(H, P) \rightarrow \max_{(H, P) \in D}, \quad (2.2)$$

где  $G_1 = \{X | C_0 X = H - z_1; S X = P - z\}$ ;  $D = \{(H, P) | G \cap G_1 \neq \emptyset\}$ .

Алгоритмы решения пар задач (2.1)-(2.2) и (I.1)-(I.2) практически не отличаются. Разница лишь в том, что (2.1) - задача параметрического дробно-линейного программирования с двумя параметрами в векторе ограничений (указания о решении такой задачи имеются в приложении). Решение задачи (2.2) отличается от решения задачи (I.2) лишь видом целевой функции и системы уравнений (4.1)-(4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Параметрический подход позволяет легко решать задачи вида

$$F(X) = SX \cdot CX + C_0 X + \sum_{i=1}^k \frac{C_i X + d_i}{k_i CX + t_i} \rightarrow \max_{X \in G}, \quad (5)$$

где  $C_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , - вектор-строки размерности  $n$ ;  $k$  - некоторое целое число;  $k_i$ ,  $t_i$ ,  $d_i$  - числа ( $k = 1$ ). Алгоритм решения этой задачи описан в [10]. Для  $k = 1$  задача (5) имеет ту же экономическую интерпретацию, что и задача (I)-(2).

На основе параметрического подхода удалось разработать методы решения специальных задач дробно-кубического программирования (I) и (2). Методы могут быть легко реализованы на ЭВМ и использоваться для решения задач в экономико-математических моделях.

## П р и л о ж е н и е

Алгоритм решения задачи линейного двухпараметрического программирования (АЛДП)

Рассмотрим следующую задачу линейного двухпараметрического программирования (ЗЛДП):

$$\begin{aligned} Z(X) &= C_0 X + H \cdot C_1 X + P \cdot C_2 X \rightarrow \max_X, \\ X \in G &= \{X \mid AX = B_0 + B_1 H + B_2 P, X \geq 0\}, \end{aligned} \quad (\text{AI})$$

где  $X$  - вектор-столбец размерности  $n$ ;  $A = (a_{ij})$  - матрица размерности  $m \times n$ ;  $B_0, B_1, B_2$  - вектор-столбцы размерности  $m$ ;  $C_0, C_1, C_2$  - вектор-строки размерности  $n$ ;  $H$  и  $P$  - параметры.

Требуется найти решение задачи (AI) для всех пар  $(H, P) \in D$ , где  $D$  - множество таких пар  $(H, P)$ , для которых существует оптимальное решение задачи (AI). Задача (AI) описана в [7], где рассмотрен алгоритм ее решения при  $B_1 = 0, C_2 = 0$ . Решением задачи (AI) является кусочно-линейная зависимость оптимального решения  $X^*$  от параметров  $H$  и  $P$  (пусть это будет функция  $\hat{X}(H, P)$ ) и кусочно-квадратичная зависимость оптимального значения целевой функции  $Z^*$  от этих параметров (пусть это будет функция  $\hat{Z}(H, P)$ ). При этом область допустимых значений параметров  $D = \{(H, P) \mid G \neq \emptyset\}$  разбивается на  $l$  областей  $d_u$ , называемых критическими, в которых  $\hat{X}(H, P)$  линейна,  $\hat{Z}(H, P)$  квадратична, а матрица базисного решения  $W_u$  одна и та же [7, 8]. При этом  $D$  и  $d_u$  - выпуклые многоугольные множества, причем  $\bigcup_{u=1}^l d_u = D$  и  $d_u$  не имеют общих внутренних точек (рис. I), а критическая область оптимального базиса  $W_u$  задается системой неравенств

$$p \cdot H + q \cdot P + g \geq 0, \quad (\text{A2})$$

где  $p, q, g$  - векторы размерности  $n$ .

В систему (A2) включаются неравенства на неотрицательность значений переменных, входящих в базис, и неравенства на неотрицательность оценок небазисных переменных. Векторы  $p, q, g$  определяются из симплексной таблицы.

Решение задачи (AI) удобно оформлять в виде симплексных таблиц. Вид симплексной отличается от таблицы решения обычной задачи линейного программирования лишь тем, что вместо одного будет три столбца для вектора ограничений  $X_0, X_1, X_2$  соответственно по  $B_0, B_1, B_2$ , а вместо одной - три строки оценок  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$  соответственно по  $C_0, C_1, C_2$ , вычисляемых, как в ЗЛП. В процессе решения вычисление значений базисных переменных и оценок производится по формулам

$$X = X_0 + X_1 \cdot H + X_2 \cdot P;$$

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 \cdot H + \Delta_2 \cdot P.$$

В [II] описан алгоритм решения задачи (AI) для случая  $C_1 = C_2 = 0$ . Алгоритм удобен для использования при решении задач нелинейного программирования с применением параметрического подхода и удовлетворяет требованиям, изложенным в §3. Этот алгоритм несложно обобщить на случай  $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ . ниже описывается общая схема решения ЗЛДП с помощью этого обобщенного алгоритма. Ввиду того, что АЛДП не является принципиально новым алгоритмом, его подробное изложение в настоящей статье не приводится.

### Общая схема АЛДП

1. Для некоторой точки  $(H^0, P^0)$  решается задача (I) так же, как и обычная ЗЛП. Этот план с номером  $u$  записывается в нулевую строку "таблицы планов" (рис. 2). Процедура нахождения точки  $(H^0, P^0)$  несложна и здесь не описывается.
2. Пусть строка "таблицы планов" с номером  $u$  уже заполнена. Определяется критическая область  $d_u$  полученного плана, т.е. уравнения границ и координаты угловых точек. Определяются номера "сопутствующих" каждой границе переменных  $x_s$ , которые надо включить (если  $S \in \omega_u$ ) или исключить (если  $S \in \bar{\omega}_u$ ) из базиса, чтобы нарушилось неравенство, соответствующее этой границе. Здесь  $s$  - номер уравнения границы,  $\omega_u$  - множество индексов базисных переменных,  $\bar{\omega}_u$  - множество индексов небазисных переменных.

3. Находятся базисы, определяющие области  $d_i$ , смежные с областью  $d_u$ , т.е. имеющие с ней общую сторону или часть стороны. С помощью процедуры, аналогичной прямой (двойственному) симплекс-методу, определяются переменные  $x_k$ ,

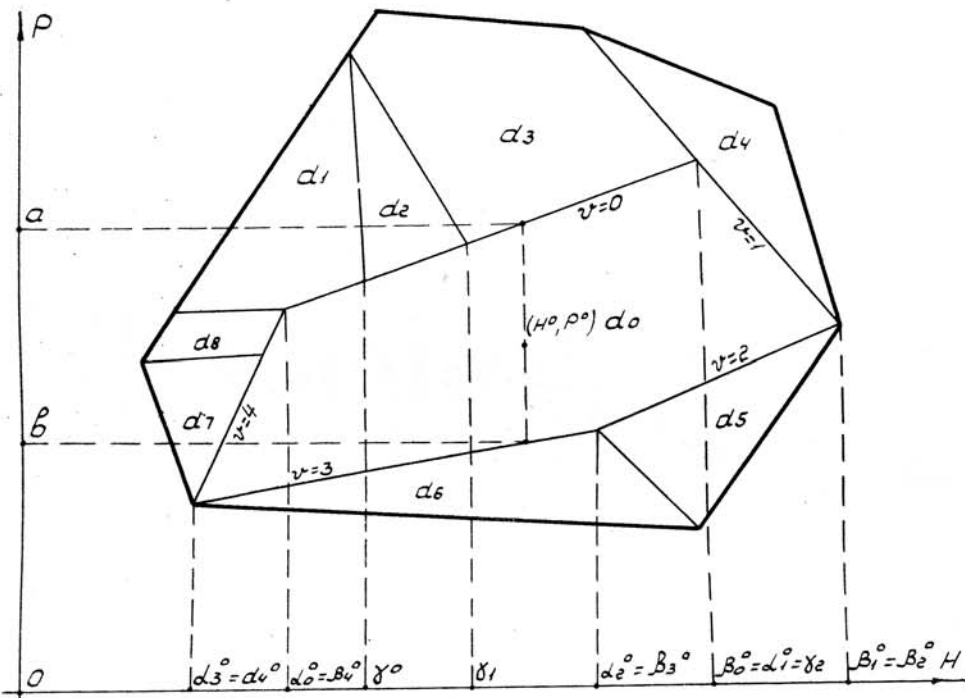


Рис.1. Множество  $D$  и его разбиение на подмножества  $d_u$

которые исключаются/включаются из базиса при включении/выключении в/исключении из него переменных  $x_s$ . Если определить такие переменные для некоторых  $x_s$  не удастся, то соответствующие границы совпадают с границей области  $D$ . Одной  $x_s$  может соответствовать несколько  $x_k$ . Заменяя в комбинации базисных переменных  $x_s$  на  $x_k$  ( $x_k$  на  $x_s$ ), получим комбинации базисных переменных областей, смежных с  $d_u$ .

4. Из полученных в п.3 базисов отбрасываем те, которые уже встречались ранее, т.е. имеются в "таблице планов", а остальные записываем последовательно в эту таблицу (рис.2).

5. Используя информацию "таблицы планов", одним шагом симплексных преобразований получаем план с номером  $u+1$ , базис которого записан в  $(u+1)$ -й строке этой таблицы, и возвращаемся к п.2, подставляя вместо  $u$  номер  $u+1$ . Вычисления заканчиваются, если в "таблице планов" уже нет неисследованных базисов.

"Таблица планов" необходима для записи найденных базисов во избежание повторения итераций. Строка этой таблицы содержит номер плана  $u$ , комбинацию его базисных переменных, номер "предшествующего" плана, из которого может быть получен план  $u$  одним шагом симплексных преобразований и индекс ключевого элемента при переходе от "предшествующего" плана к плану (рис.2).

Геометрическая интерпретация АЛДП. Определение области начинается с нахождения одного многоугольника  $d_0$  (нулевая итерация), отыскиваются смежные с ним многоугольники (первая итерация), затем смежные с этими многоугольниками (вторая итерация) и так далее до тех пор, пока вся область  $D$  не будет определена (рис.3).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Для нахождения границ области  $d_u$  (п.2) из симплексной таблицы плана  $u$  определяют векторы  $p, q, g$  и систему неравенств (A2). Если  $u=0$ , то границу с номером  $v=0$  определяют, подставляя  $H=H_0$  в систему (A2) и решая получившуюся систему неравенств с одной переменной. При этом получают отрезок  $[b, a]$  (рис.1),  $(-\infty, a]$  или  $[b, +\infty)$ . Пусть в точке  $(H^0, a)$  обратилось в равенство неравенство с номером

$$p_s H + q_s P + g_s = 0. \quad (A3)$$



Номер плана	I	2	3	4	5	Номера		
						предшествующего плана	ключевой строки	ключевого столбца
0	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_6$	$x_4$	-	-	-
I	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_6$	$x_1$	0	4	I
2	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_1$	$x_4$	0	5	I
3	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_1$	$x_2$	I	4	2

Рис.2. "Таблица планов" (пример заполнения)

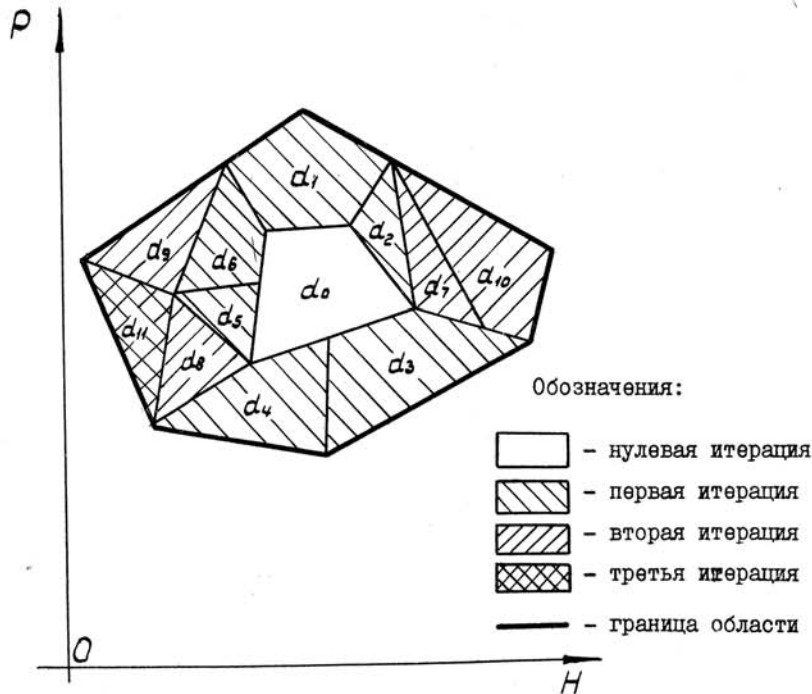


Рис.3. Геометрическая интерпретация АЛП

Оно и определяет сторону с номером  $\nu = 0$ . Если  $u \neq 0$ , то номер  $\nu = 0$  получает сторона, уравнение которой было нарушено при переходе к плану  $u$  от предшествующего плана. В этом случае уже известен интервал  $H \in [\alpha_\nu^u, \beta_\nu^u]$  значений параметра  $H$ , в котором уравнение (A3) задает сторону  $\nu$ . Если  $u = 0$ , то этот интервал определяется решением системы (A2) с учетом подстановки в нее выражения параметра  $P$  через  $H$  из уравнения (A3). Пусть  $t$  - номер неравенства, обратившегося в равенство  $H = \alpha_\nu^u$  ( $H = \beta_\nu^u$ ). Выражаем из него  $P$  как функцию от  $H$  и подставим в систему (A2), решив которую, получим интервал  $H \in [\beta_\nu^u, \beta_{\nu+1}^u]$  (либо  $H \in [\alpha_{\nu+1}^u, \alpha_\nu^u]$ ), определяющий сторону  $\nu+1$ , имеющую со стороной  $\nu$  одну общую точку. При этом переменная  $x_j$  будет "сопутствовать" стороне  $\nu$ . Находим неравенство, обратившееся в равенство при  $H = \beta_{\nu+1}^u$  ( $H = \alpha_{\nu+1}^u$ ), и переходим к определению стороны  $\nu+2$  и так далее, пока не дойдем снова до точки  $\beta_0^u$  ( $\alpha_0^u$ ), и неравенство с номером  $S$  снова не обратится в равенство. При выходе на бесконечный интервал возвращаются к точке  $H = \beta_0^u$  ( $H = \alpha_0^u$ ) и повторяют всю процедуру сначала, пока не будет опять получен бесконечный интервал.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При определении индексов ключевого элемента для перехода к новому базису в п.3 из уравнения стороны  $\nu$  области  $d_u$  выражают  $P$  как функцию от  $H$ , или наоборот, и подставляют в выражения для значений базисных переменных (оценочных коэффициентов). Выражения делятся на соответствующие положительные элементы столбца "сопутствующей" переменной  $x_s$  (на отрицательные элементы строки, в которую входит эта переменная  $x_s$ ). Полученные выражения обозначим через  $\beta_k(H)$ . Пусть  $k \in K$  - множество номеров положительных элементов столбца  $x_s$  (отрицательных элементов строки, в которую входит  $x_s$ ). Для определения номера ключевой строки (столбца) решают несложную задачу

$$R(H) = \min_{\substack{k \in K \\ H \in [\alpha_\nu^u, \beta_\nu^u]}} \beta_k(H). \quad (A4)$$

Решением будет последовательность отрезков  $[\alpha_\nu^u, \beta_0^u], [\beta_0^u, \beta_1^u], [\beta_1^u, \beta_2^u], \dots, [\beta_{t-1}^u, \beta_t^u]$ , где  $\beta_t^u = \beta_\nu^u$ , и номеров  $\{k_t\}$ , определяющих функцию  $R(H)$  на этих отрезках соответственно,  $t = 0, 1$  (рис. I).



При  $H \in [x_k, x_{k+1}]$  введение в базис переменной  $x_s$  ( $x_k$ ) в уравнение с номером  $k_j$  (вместо  $x_s$ ) не приводит к нарушению допустимости (оптимальности) базиса. Поэтому столбец (строка) с номером  $k_j$  будет ключевой (ключевым).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При вычислениях по АЛПД можно выражать параметр  $H$  через  $P$ , а можно выражать  $P$  через  $H$ , так как оба параметра совершенно равноправны. То, какой из этих вариантов предпочесть, определяется из соображений удобства вычислений.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если в результате решения задачи (A4) имеется для некоторого  $k$  несколько совпадающих выражений  $\beta_k$ , то в силу неоднозначности выбора  $k_j$  разбиение области  $D$  на многоугольные множества  $d_u$  будет неоднозначным. Тогда в качестве  $k_j$  берется номер любого из совпадающих выражений  $\beta_k$ . Как показано в [II, теорема I.5], разбиение области  $D$  на подобласти  $d_u$ , в которых выражение для  $Z(H, P)$  одно и то же, будет однозначным.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. АЛПД обеспечивает нахождение всей области  $D$  (доказательство этого полностью совпадает с доказательством теоремы I.6 в работе [II]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. АЛПД легко модифицировать для решения следующей задачи дробно-линейного программирования с двумя параметрами:

$$Z(x) = \frac{C_1 x + d}{C_0 x + k} \rightarrow \max_x,$$

$$x \in G \equiv \{x \mid Ax = B_0 + B_1 \cdot H + B_2 \cdot P, x \geq 0\}, \quad (A5)$$

где  $H$  и  $P$  - параметры,  $C_0 x + k \neq 0$  при  $x \in G$  и  $(H, P) \in D \equiv \{(H, P) \mid G \neq \emptyset\}$ .

Свойства решения задачи (A5) доказаны в [I2] для случая  $B_2 = 0$ . Если  $B_2 \neq 0$ , то задача обладает, по существу, теми же свойствами, только вместо одного будет два параметра, а область  $D$  и критические области  $d_u$  будут не отрезками, а многоугольными множествами. Доказательства этих свойств почти совпадают с доказательствами в работах [I2, 9] и здесь не приводятся.

Свойства решения задач в виде (A1) и (A5) практически полностью совпадают. Различие лишь в виде функции  $Z(H, P) \rightarrow \max_x Z(x)$ .

В задаче (A5) она кусочно-дробно-линейная. Поэтому алгоритм решения этой задачи будет отличаться от АЛПД лишь правилом расчета оценочных коэффициентов, подобно тому, как алгоритм решения задачи дробно-линейного программирования отличается от симплекс-метода. В силу этих особенностей не только правые части ограничений, но и оценочные коэффициенты будут зависеть от  $H$  и  $P$ . Аналогично легко модифицировать АЛПД для решения задачи дробно-линейного программирования с двумя параметрами в числителе и в знаменателе целевой функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Применение АЛПД для решения первой подзадачи при использовании параметрического подхода имеет следующие особенности.

1. На значения параметров  $H$  и  $P$  априори известны ограничения  $H_{\min} \leq H \leq H_{\max}$ ,  $P_{\min} \leq P \leq P_{\max}$ , поскольку параметры отражают вполне определенные экономические показатели. Эти ограничения сужают область  $D$ . При решении их добавляют в систему (A3), считая, что к ним не относится никакая сопутствующая переменная.

2. Не обязательно исследовать всю область  $D$ ; с целью уменьшения времени решения задачи на ЭВМ полезно разработать алгоритмы направленного движения по параметрам  $H$  и  $P$  в сторону увеличения целевой функции  $Z(H, P)$ . В данной статье такие алгоритмы не рассматриваются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. БАТРИНОВСКИЙ К.А., ЛОТОВ А.В. Об основных направлениях имитационного моделирования механизма стимулирования производства на уровне предприятия. - Экономика и мат. методы, 1983, т.19, вып.3, с.505-515.
2. БЕРЕЗА Т.Н., ДУБСОН М.С., ТАТЕВОСЯН Г.М., ЭТИНГОФ М.Е. Машинный эксперимент с системами экономического механизма на основе модели "Согласование интересов". - М.: изд. ЦЭМИ АН СССР, 1982.
3. БЕЛКИН М.И., ВОЛКОНСКИЙ В.А., ПОМАНСКИЙ А.Б., ШАПИРО А.Д. Моделирование воздействия хозяйственного механизма на показатели эффективности работы предприятия. - Экономика и мат. методы, 1980, т.16, вып.5, с.880-892.
4. Основные положения об образовании и расходовании фонда

- материального поощрения и фонда социально-культурных мероприятий и жилищного строительства (фондов поощрения) в 1981-1985 годах в промышленности. - В кн.: Совершенствование хозяйственного механизма. Сборник документов. - М.: Правда, 1982.
5. КАРМАНОВ В.Г. Математическое программирование. - М.: Наука, 1980.
6. БЛИНОВ О.Е. Метод решения одного класса задач дробно-квадратичного программирования. - Электротехническая промышленность. Общепромышленные вопросы, 1979, вып.12, с.6-8.
7. KAUSMANN U., LOMMATZCH K., NOZICKA F. Lineare parametrische Optimierung. - Berlin: Academic Verlag, 1976.
8. ВИЛЬЯМС Н.Н. Параметрическое программирование в экономике. - М.: Статистика, 1976.
9. ЧЕРНОВ Ю.П., ЛАНГЕ Э.Г. Задачи нелинейного программирования с удельными экономическими показателями. - Фрунзе: Илим, 1978.
10. ЕГОРОВА Е.Н. О моделях для исследования экономического механизма научно-технического прогресса. - В кн.: Методология оценки эффективности общественного производства. - М.: изд. ЦЭМИ АН СССР, 1984, с.64-74.
11. NYKOWSKY I. Dwuparametriszny problem liniowy. - Przegląd statisticzny, 1965, N 3, s.203-217; N 4, s.311-323.
12. МАНКРОВ Д.М. Исследование задачи дробно-линейного программирования при варьировании некоторых параметров. - Изв. АН АзССР. Сер. физико-техн. и эконом. наук, 1968, № 4, с.89-95.

Поступила в ред.-изд. отдел  
13.02. 1986 г.